

# Étude de fonctions

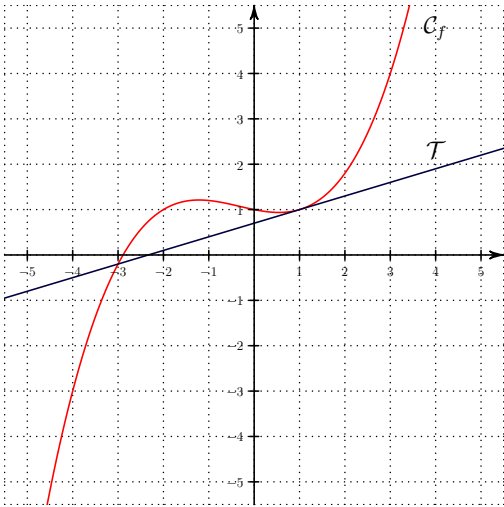
## I. Rappels : dérivation

### 1) Nombre dérivé, tangente

On considère une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ , sa courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  dans un repère orthogonal, et un réel  $a$  dans  $I$ .

Si  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente  $T$  au point d'abscisse  $a$  non parallèle à l'axe des abscisses, on dit que  $f$  est dérivable en  $a$ .

Le coefficient directeur de la tangente  $T$  au point  $a$  est le nombre dérivé  $f'(a)$ .



Propriété

équation de la tangente

La tangente  $T$  à  $\mathcal{C}_f$  au point de coordonnées  $(a ; f(a))$  a pour équation  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

### 2) Fonction dérivée et dérivées usuelles

On dit que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $I$  si elle est dérivable en tout point  $a$  de  $I$ .

La fonction dérivée de  $f$  est notée  $f'$  et correspond à la fonction qui à tout réel  $x$  de  $I$ , associe le nombre  $f'(x)$ .

#### Ⓐ Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	est dérivable sur ...	$f'(x)$
$k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$0$
$x$	$\mathbb{R}$	$1$
$x^n$ où $n \geq 1$	$\mathbb{R}$	$nx^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$]0 ; +\infty[$	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$\mathbb{R}$	$e^x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$

b Opérations sur les fonctions dérivées

On considère  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

$f$	est dérivable ...	$f'$
$k \times u$ ( $k$ constante)	sur $I$	$k \times u'$
$u + v$	sur $I$	$u' + v'$
$u \times v$	sur $I$	$u' \times v + u \times v'$
$\frac{u}{v}$	si $v(x) \neq 0$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$\frac{1}{v}$	si $v(x) \neq 0$	$\frac{-v'}{v^2}$
$u^n$ avec $n \geq 1$	sur $I$	$n \times u' \times u^{n-1}$
$\ln(u)$	si $u(x) > 0$	$\frac{u'}{u}$
$e^u$	sur $I$	$u' \times e^u$

II. Rappels : limites et asymptotes

1) Limites des fonctions de références

a Limite en  $\infty$

$f(x)$	$x^n$	$\frac{1}{x^n}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$e^x$	$e^{ax}$	$\ln(x)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$	$+\infty$	0	$+\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$ si $a > 0$ 0 si $a < 0$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$	$-\infty$ si $n$ impair $+\infty$ si $n$ pair	0	non définie	non définie	0	0 si $a > 0$ $+\infty$ si $a < 0$	non définie

b Limite en 0

$f(x)$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\ln(x)$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) =$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) =$	$-\infty$ si $n$ impair $+\infty$ si $n$ pair	non définie	non définie

c Opérations sur les limites

- $f$  et  $g$  sont deux fonctions;
- $A$  est soit  $+\infty$ , soit  $-\infty$  ou un réel;
- **F. I.** : Forme indéterminée;
- $*$  : règle des signes.

Si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) =$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim_{x \rightarrow A} g(x) =$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow A} f(x) + g(x) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<b>F. I.</b>

Si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) =$	$\ell$	$\ell \neq 0$	0	$\infty$
Si $\lim_{x \rightarrow A} g(x) =$	$\ell'$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow A} f(x) \times g(x) =$	$\ell \times \ell'$	$\infty^*$	<b>F. I.</b>	$\infty^*$

Si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) =$	$\ell$	$\ell \neq 0$	0	$\ell$	$\infty$	$\infty$
Si $\lim_{x \rightarrow A} g(x) =$	$\ell' \neq 0$	0	0	$\infty$	$\ell'$	$\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\infty^*$	<b>F. I.</b>	0	$\infty^*$	<b>F. I.</b>

## 2) Comportement asymptotique

On considère une fonction  $f$ , sa courbe  $\mathcal{C}_f$ ,  $a$  et  $\ell$  des nombres réels.

### Définition

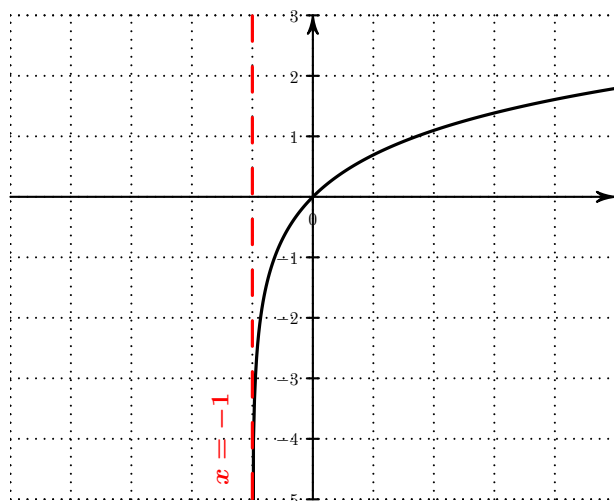
existence d'asymptote horizontale

- Lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ , on dit que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet la droite d'équation  $y = \ell$  comme asymptote horizontale en  $+\infty$ .
- Lorsque  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , on dit que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet la droite d'équation  $x = a$  comme asymptote verticale.
- Lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (mx + p) = \ell$ , on dit que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet la droite d'équation  $y = mx + p$  comme asymptote oblique en  $+\infty$ .

On retrouve les même situations lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ .

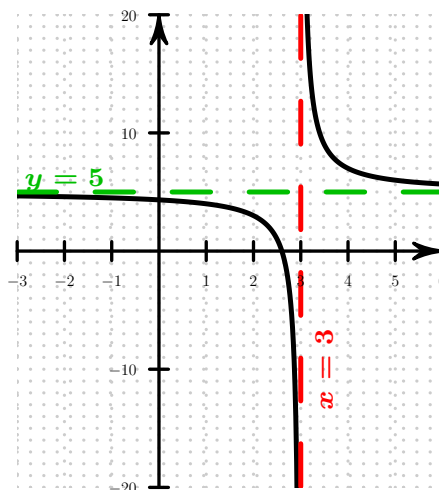
### Exemple(s)

$$f(x) = \ln(x+1)$$



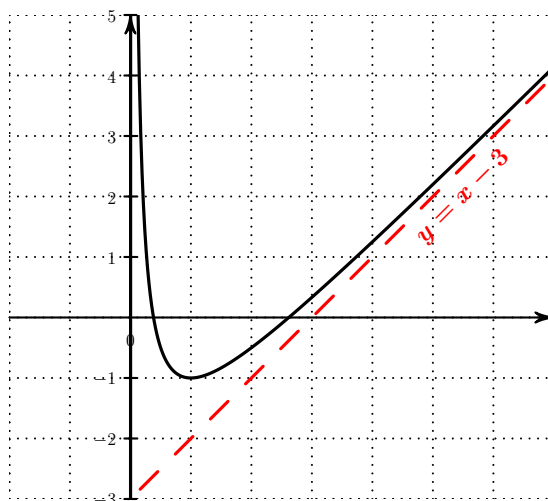
la droite  $x = -1$  est asymptote verticale

$$g(x) = \frac{2}{x-3} + 5$$



les droites  $y = 5$  et  $x = 3$  sont asymptotes horizontale et verticale

$$h(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}$$



la droite  $y = x - 3$  est asymptote oblique

### III. Applications

#### 🔧 Application

calculer une dérivée

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions sur l'intervalle donné.

a)  $f_1(x) = x^2 e^x$  pour  $x \in \mathbb{R}$

b)  $f_2(x) = 3 \ln(x) - \frac{5}{x} + 2\sqrt{x}$  pour  $x \in ]0; +\infty[$

c)  $f_3 = \frac{5x+3}{x-4}$  pour  $x \in ]-\infty; 4[ \cup ]4; +\infty[$

d)  $f_4(x) = e^{x^2-x}$  pour  $x \in \mathbb{R}$

e)  $f_5(x) = \ln(x^3 + 1)$  pour  $x \in ]0; +\infty[$

#### 🔧 Application

calculer une limite

Déterminer les limites suivantes :

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 - x^2 e^x$

b)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{3+x}{\ln x}$

c)  $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x^2 - 6x + 7}{4 + 2x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2-x}$

#### 🔧 Application

étudier une fonction et ses asymptotes

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -\infty; -2[ \cup ] -2; +\infty[$  par  $f(x) = x + 3 - \frac{1}{x+2}$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

1. Calculer la dérivée de la fonction  $f$  et étudier ses variations.
2. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
3. En déduire l'existence d'une asymptote verticale et préciser son équation.
4. Montrer que la droite  $D$  d'équation  $y = x + 3$  est asymptote oblique à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
5. Déterminer la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et de la droite  $D$ . Justifier.