

Calcul intégral

Dans ce document, f est une fonction définie et continue sur un intervalle $I = [a ; b]$ de \mathbb{R} .

I. Primitives

Soit les fonctions $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$ et $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5x + 3$, définies sur \mathbb{R} .

Quel lien existe entre ces deux fonctions?

1) Définitions

Dans cette partie, on considère une fonction f définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Définition

primitive

On dit que F est une **primitive** de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F' = f$.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle.

⚙️ Application

f est la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x + 2$.

Déterminer une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .

Propriété

primitives d'une même fonction

Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante. C'est-à-dire que si F est une primitive de f sur I , alors la fonction G_k définie sur I par $G_k(x) = F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$ est aussi une primitive de f .

Propriété

Soit x_0 et y_0 deux réels de I .

Il existe une unique primitive F de f telle que $F(x_0) = y_0$.

Cette valeur s'appelle une condition initiale.

🌀 Application

- Soit la fonction $f(x) = 5x^3 - 8x^2 + \frac{5}{4}$ définie sur \mathbb{R} .
- 1. Déterminer l'ensemble des primitives F_k , où $k \in \mathbb{R}$ de la fonction f .
 - 2. Déterminer la primitive de la fonction f prenant la valeur 25 en 3.

2) Primitives des fonctions usuelles

Fonction f	Une primitive F	Sur l'intervalle I
$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax + C$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z} \text{ et } n \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	\mathbb{R} si $n \in \mathbb{N}$ $] -\infty ; 0[\text{ ou }]0 ; +\infty[$ si $n < 0$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$	$] -\infty ; 0[\text{ ou }]0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + C$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	\mathbb{R}
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	\mathbb{R}

🌀 Application

calcul de primitives (1)

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = x$
- b) $f(x) = x^3$
- c) $f(x) = 3x^5 + 1$
- d) $f(x) = \sqrt{x}$
- e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
- g) $f(x) = \frac{-2}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
- h) $f(x) = 7 \cos x - 2 \sin x$

3) Primitives et composition

Fonction f	Une primitive F sur I	Condition sur u
$a u', a \in \mathbb{R}$	$a u + C$	
$u' + v'$	$u + v + C$	
$u' u^n, n \in \mathbb{Z} \text{ et } n \notin \{-1; 0\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	$u(x) \neq 0$ pour $x \in I$ si $n \leq -2$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + C$	$u(x) > 0, x \in I$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	$u(x) \neq 0, x \in I$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u(x) > 0, x \in I$
$u' e^u$	$e^u + C$	
$\cos(\omega x + \varphi), \omega \in \mathbb{R} \text{ et } \varphi \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{\omega} \sin(\omega x + \varphi) + C$	
$\sin(\omega x + \varphi), \omega \in \mathbb{R} \text{ et } \varphi \in \mathbb{R}$	$-\frac{1}{\omega} \cos(\omega x + \varphi) + C$	

🔧 Application

calcul de primitives (2)

Calculer les primitives des fonctions suivantes :

- a)** $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
- b)** $f(x) = (x + 1)e^{x^2 + 2x + 1}$
- c)** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
- d)** $f(x) = \cos(2x + 7)$
- e)** $f(x) = \frac{x^3}{(x^4 + 1)}$
- f)** $f(x) = \sin x \cos^3 x$
- g)** $f(x) = \tan x$
- h)** $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

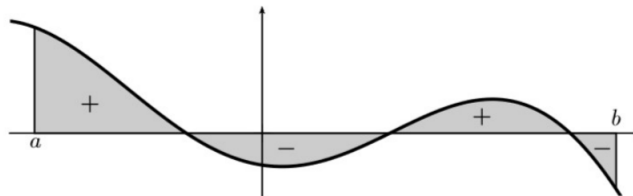
II. Intégration

1) Notion d'aire

Définition

intégrale

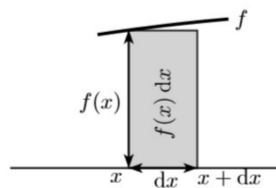
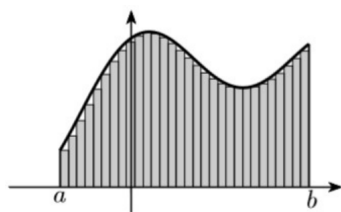
On appelle intégrale de la fonction f entre a et b est l'aire signée sous la courbe de f .



Ceci signifie qu'on compte positivement les aires situées au-dessus de l'axe des abscisses et négativement celles situées en-dessous, puis qu'on en fait la somme.

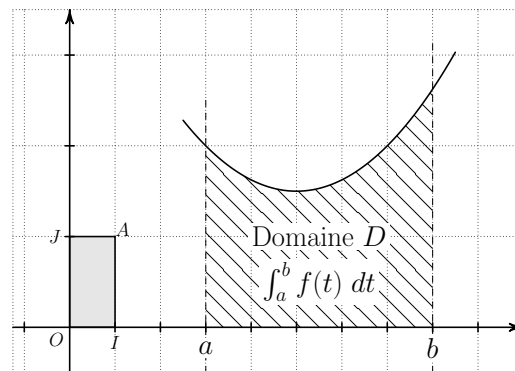
On note alors cette intégrale $\int_a^b f(x) dx$ et on lira «intégrale de a à b de $f(x)$ ».

$\int_a^b f(x) dx$ peut être interpréter comme la «somme infinie» des aires $f(x) \times dx$ des rectangles infinitésimaux de hauteur $f(x)$ et de largeur dx .



Sur l'intervalle $[a ; b]$ l'aire sous la courbe est la surface du domaine hachuré D .

Cette aire est donc obtenue par calcul de $\int_a^b f(t) dt$.



L'unité d'aire est donnée par la surface du rectangle $OIAJ$.

2) Calcul d'intégrales

Propriété

calcul d'une intégrale

Soit F une primitive de f sur l'intervalle I . Alors : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Remarque(s)

Dans l'écriture $\int_a^b f(x) dx$, la lettre x est une variable «muette». Ainsi : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f$

Propriété

a) $\int_a^a f(x) dx = 0$

b) $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

c) $\int_a^a k dx = k(b-a)$

* Application

calculer une intégrale depuis une primitive

Calculer :

a) $A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} dx$

b) $B = \int_2^5 (3t^2 + 4t - 5) dt$

c) $C = \int_{-1}^1 2t^2 - 1 dt$

d) $D = \int_{-1}^1 2 + e^{-2x} dx$

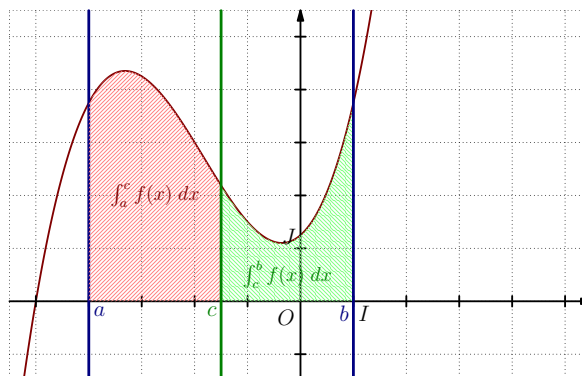
3) Propriétés de l'intégrale

Propriété

relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a ; b]$. Soit c un réel de I .

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Propriété

linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a ; b]$ et λ un réel quelconque.

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \lambda \int_a^b g(x) dx$$

Propriété

inégalité

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a ; b]$.

- Si pour tout $x \in [a ; b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$;
- Si pour tout $x \in [a ; b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

⚙️ Application

- Calculer $\int_1^e \frac{1}{x} dx$.
- Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ a pour primitive sur $] -1 ; +\infty[$ la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$.
On admettra que la dérivée d'une fonction sous la forme $\ln(u)$ est $\frac{u'}{u}$.
 - Calculer $\int_1^e \frac{1}{1+x} dx$.
- Démontrer que pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.
- En déduire la valeur de $\int_1^e \frac{1}{x(x+1)} dx$.

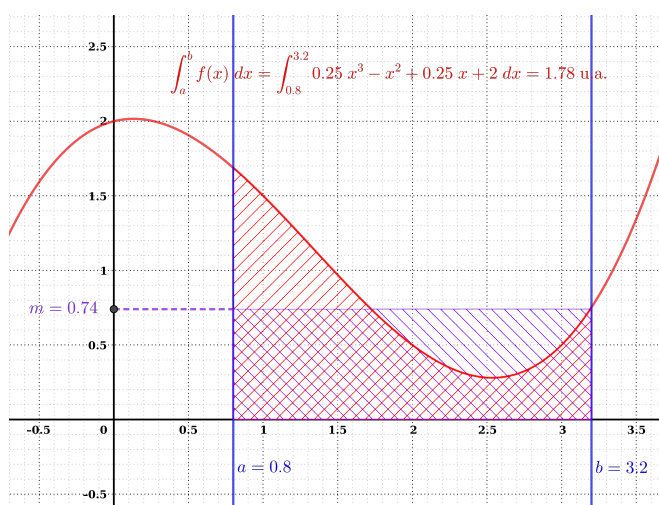
Propriété

valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

On appelle valeur moyenne de f sur I le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-contre) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu).



III. Intégration par parties

Propriété

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ de dérivées u' et v' continues, alors :

$$\int_a^b u v'(x) dx = [u v(x)]_a^b - \int_a^b u' v(x) dx$$

⚠️ Remarque(s)

Le choix de u et v' est à faire judicieusement puisqu'il faut pouvoir trouver une primitive de $u'v$.

⚙️ Application

intégration par partie

Calculer $\int_0^1 x e^x dx$.

⚙️ Application

déterminer une primitive

Déterminer une primitive de \ln sur $]0; +\infty[$.